Комплексный анализ, семинар 4 2.03.2012

1. Может ли хотя бы одно из неравенств Коши для коэффициентов Тейлора функции $f \in \mathcal{O}(\{|z| < R\})$ обратиться в равенство? Если да, то для каких функций f это возможно?

2. Найдите порядки всех нулей следующих функций:

1) $(1 - e^z)(z^2 - 4)^3$;

2) $\frac{1 - \operatorname{tg} z}{z}$;

3) $e^{\operatorname{ctg} z}$;

4) $(1 - \sqrt{2 - 2\cos z})^2$.

3. Существует ли функция $f \in \mathcal{O}(\{|z| \le 1\})$ со следующими свойствами:

1) $f(\frac{1}{n}) = (-1)^n$, $n = 1, 2, 3 \dots$

2) $f(\frac{1}{n}) = \frac{n}{n+1}$, $n = 1, 2, 3 \dots$

3) $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}$, $n = 1, 2, 3 \dots$

4) $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3}$, $n = 1, 2, 3 \dots$

4. Пусть функция $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$ и $f(x) = x^x$ для $x \in (0, \infty)$. Чему равно $f(i)$?

5. Пусть $U_a \subset \mathbb{C}$ – окрестность точки $a \in \mathbb{C}$. Для функции $f \in \mathcal{O}(U_a)$ определим число $\boldsymbol{D}(f, a)$ как размерность линейного пространства (над полем $\mathbb{C}$), порожденного всеми ростками функции f в точке a.

1) Вычислите $\boldsymbol{D}\left(\frac{z^2-1}{z^3+2}, 1\right)$, $\boldsymbol{D}(\sqrt{z}, 1)$, $\boldsymbol{D}(z^\alpha, 1)$, (для произвольного фиксированного $\alpha \in \mathbb{C}$), $\boldsymbol{D}(\ln z, 1)$.

2) Приведите пример функции f, голоморфной в точке $z = 1$, для которой $\boldsymbol{D}(f, 1) = \infty$.

3) Предположим, что функция $f(z)$ удовлетворяет в окрестности точки $z = 1$ некоторому линейному обыкновенному дифференциальному уравнению с целыми (то есть, голоморфными во всей комплексной плоскости) коэффициентами. Как связаны порядок этого дифференциального уравнения и $\boldsymbol{D}(f, 1)$?

6. Функция $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$ разложена в ряд Тейлора в окрестности точки $z = a$ ($|a| \le 1$). При каких значениях a это разложение позволяет аналитически продолжить функцию $f(z)$?

7. Гамма-функция Эйлера определяется в полуплоскости $\{\mathrm{Re}\, z > 0\}$ при помощи интеграла

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt$$

(здесь $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$). Покажите, что функция $\Gamma(z)$ может быть аналитически продолжена во всю комплексную плоскость за исключением точек $0, -1, -2, \dots$